www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS CHIMIE-CENTRE 1990 MATHÉMATIQUES OPTION P'

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

DURÉE : 4 heures

Dans ce problème, E désigne un espace vectoriel de dimension infinie sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. On admettra que, comme en dimension finie, tout sous-espace vectoriel de E admet des supplémentaires dans E.

On note e l'endomorphisme unité de E, qui à tout élément x de E associe $e(x) = x$.

Soit u un endomorphisme de E. On note ker u le noyau de u, et, pour tout sous-espace vectoriel F de E, u(F) l'image de F par u. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'endomorphisme u^k de E par la récurrence $u^0 = e$, $u^{k+1} = u \circ u^k$. Pour tout polynôme $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à coefficients complexes on note Q(u) l'endomorphisme $\sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ de E.

Dans toute la suite de ce problème on considère le polynôme :

$$P(X) = \prod_{q=1}^{p} (X - r_q)^{n_q} = (X - r_1)^{n_1} (X - r_2)^{n_2} \dots (X - r_p)^{n_p}$$

où $r_1, r_2 \dots r_p$ sont des nombres complexes deux à deux distincts et $n_1, n_2 \dots n_p$ des nombres entiers strictement positifs donnés. On pose $n = n_1 + n_2 \dots + n_p$.

I

1°) Soit v un endomorphisme surjectif de E.

a) Montrer qu'il existe un endomorphisme injectif w de E tel que $v \circ w = e$.

On pourra montrer que la restriction de v à un supplémentaire S de ker v définit un isomorphisme entre S et E, et utiliser l'isomorphisme réciproque.

b) Soit k un nombre entier strictement positif. Montrer que pour tout nombre entier i tel que $0 \leq i < k$ on a $w^i(\ker v) \subset \ker v^k$.

c) Montrer que $\ker v^k$ est la somme directe des sous-espaces $w^i(\ker v)$, $0 \leq i < k$.

d) Déterminer la dimension de $\ker v^k$ lorsque ker v est de dimension finie s.

2°) Soient A(X) et B(X) deux polynômes à coefficients complexes premiers entre eux, et u un endomorphisme de E. Montrer que ker [A(u)oB(u)] est la somme directe de ker A(u) et de ker B(u).

3°) On suppose que pour tout nombre entier q tel que $1 \leq q \leq p$ l'endomorphisme $u - r_q e$ est surjectif. Soit w_q un endomorphisme injectif de E tel que $(u - r_q e) \circ w_q = e$.

Déterminer ker P(u) en fonction des sous-espaces $w_q^k(\ker (u - r_q e))$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq p$.

Calculer la dimension de ker P(u) lorsque $\ker (u - r_q e)$ est de dimension finie s_q pour tout q tel que $1 \leq q \leq p$.

Tournez la page S.V.P.

II

On suppose dorénavant que E est muni d'une loi de composition interne associative et commutative, qui à un couple quelconque (x,y) d'éléments de E associe un élément de E noté xy. On suppose de plus que pour tout élément x de E, l'application x^* de E dans E qui à un élément y quelconque de E associe $x^*(y) = xy = yx$ est linéaire. Enfin on suppose qu'il existe un unique élément de E, noté 1, tel que $1x = x1 = x$ pour tout élément x de E. Un élément x de E est dit *inversible* si et seulement s'il existe un élément de E, noté x^{-1} et appelé *inverse* de x, vérifiant les égalités $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$.

Soit C le sous-espace vectoriel de E engendré par 1. Les éléments de C seront appelés les *constantes*.

Soit τ un endomorphisme surjectif de E tel que pour tout couple (x,y) d'éléments de E on ait $\tau(xy) = \tau(x)\,\tau(y)$ et soit d un endomorphisme surjectif de E qui commute avec τ et tel que pour tout couple (x,y) d'éléments de E on ait $d(xy) = d(x)\tau(y) + xd(y)$. Soit enfin j un endomorphisme injectif de E tel que $doj = e$.

1°) a) Calculer $\tau(1)$ et $d(1)$. En déduire $\tau(c)$ et $d(c)$ pour toute constante c.

b) Montrer que pour tout couple (x,y) d'éléments de E on a :

$$[\tau(x) - x]\, d(y) = [\tau(y) - y]\, d(x)$$

c) Montrer que si un élément x de E est inversible, il en est de même pour $\tau(x)$.

2°) Soient r un nombre complexe et x un élément de $\ker(d - re)$.

a) Soit y un élément de $\ker d$. Calculer $(d - re)(yx)$.

b) Montrer que si x est inversible, la restriction de x^* à $\ker d$ définit un isomorphisme entre les sous-espaces vectoriels $\ker d$ et $\ker(d - re)$ de E.

c) Montrer que s'il existe un élément x_r de $\ker(d - re)$ qui est inversible, alors $d - re$ est surjectif. Déterminer un endomorphisme injectif j_r de E tel que $(d - re) \circ j_r = e$.

[On pourra chercher des solutions de l'équation $(d - re)(x) = b$, b élément quelconque fixé de E, de la forme $x = yx_r$]

3°) On suppose que $\ker d$ est de dimension finie s et que pour tout nombre entier q tel que $1 \leq q \leq p$ il existe un élément x_q de $\ker(d - r_q e)$ qui est inversible. Soit $y_1, y_2, \ldots y_s$ une base de $\ker d$. Déterminer la dimension de $\ker P(d)$ et en construire une base.

4°) On suppose que $\ker d$ est de dimension 1. Déterminer $\ker d$. Montrer que dans ce cas, on a nécessairement soit $\tau = e$, soit $d = \lambda(\tau - e)$ où λ est un nombre complexe.

Tournez la page S.V.P.

III

On suppose dans cette partie que P(X) n'a que des racines simples (et donc que $p = n$), que ker d est de dimension 1, et que pour tout nombre entier q tel que $1 \leq q \leq n$ il existe un élément x_q de $\ker(d - r_q e)$ qui est inversible. On se propose de déterminer dans ce cas particulier les solutions de l'équation en l'inconnue $x \in E$: (1) $P(d)(x) = b$

où b est un élément fixé quelconque de E.

1°) Déterminer la solution générale de l'équation (H) : $P(d)(x) = 0$.

Montrer que la solution générale de l'équation (1) s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation (H) une solution particulière de l'équation (1).

2°) Déterminer une solution particulière de l'équation (1) de la forme : $x_0 = \sum_{q=1}^{n} z_q x_q$

où $z_1, z_2, \ldots z_n$ sont des éléments de E qui vérifient pour tout nombre entier k tel que $0 \leq k \leq n-2$ l'égalité :

$$\sum_{q=1}^{n} r_q^{\,k}\, d(z_q)\tau(x_q) = 0 .$$

On admettra sans en donner la démonstration que si $a_1, a_2, \ldots a_m$ sont m nombres complexes, le déterminant (dit déterminant de Vandermonde) de la matrice carrée d'ordre m dont l'élément de la i-ème ligne et la j-ème colonne est $(a_j)^{i-1}$ est égal à $\prod_{1 \leq i < j \leq m} (a_j - a_i)$.

En déduire la solution générale de l'équation (1).

3°) APPLICATION : Dans cette question, E désigne l'espace vectoriel des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes, muni du produit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On définit les endomorphismes τ et d de E par :

$\tau[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$d[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $v_n = x_{n+1} - x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

pour tout élément $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E.

Il est évident que τ et d vérifient les propriétés indiquées dans le préambule de la partie II, et l'on n'en rédigera pas la démonstration.

a) Déterminer un endomorphisme injectif j de E tel que $doj = e$.

b) Pour tout nombre complexe r, déterminer $\ker(d - re)$.

c) On se propose de déterminer toutes les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes qui vérifient la relation de récurrence :

(1) $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = n.2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (1) si et seulement si elle est solution d'une équation du type $P(d)[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = (n.2^n)_{n\in\mathbb{N}}$, où P(X) est un polynôme que l'on déterminera.

En déduire la solution générale de (1).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail